Modelos Alométricos e Isométricos en
Mojarra y Lobina con apoyo de tecnología.

José Trinidad Ulloa Ibarra[1,2], Aurelio Benítez Valle[3] , Gerónimo Rodríguez Chávez[3]

[1]Escuela Nacional de Ingeniería Pesquera. Universidad Autónoma de Nayarit
[2]Programa Académico de Matemática Educativa. Cuerpo Académico de Matemática Educativa. UAN.
[3]Escuela Nacional de Ingeniería Pesquera. Cuerpo Académico en Pesca y Acuacultura. Universidad Autónoma de Nayarit.

Palabras claves: Alometría, modelación, pesca.

RESUMEN
Al estudiar el estado de las poblaciones ícticas y el efecto de la pesca sobre ellas, los profesionales de la pesca deben llevar a cabo su análisis en términos cuantitativos precisos. Para hacerlo tiene que recurrir a las matemáticas y para emplear éstas, las complejidades de la situación real deben ser sustituidas por modelos matemáticos abstractos, más o menos simplificados. Tales modelos pueden ser utilizados para representar, tanto las cantidades que interesan (abundancia de la población, tamaño de los peces individuales), como la relación entre dichas cantidades. En este trabajo se presenta una metodología basada en el uso de computadoras y sobre todo en el manejo de un software que en la actualidad casi el 100% de usuarios tiene, el Excel, para realizar esa tarea.

INTRODUCCIÓN
La relación entre la biología y la matemática ha sido fructífera para ambas desde que alguien, por primera vez, se dio cuenta de la posibilidad de modelar los fenómenos biológicos mediante entes matemáticos (Sánchez, F., 2002).

Se atribuye a Leonardo de Pisa, Fibonacci, ser uno de los precursores de la modelación matemática, en 1219 en el Liber Abacci propuso un problema cuya solución se daría en términos de ecuaciones para la dinámica de una población.

En su forma más sencilla, estos profesionistas utilizan normalmente modelos matemáticos; por ejemplo, es usual representar el tamaño de un pez por el número de centímetros entre el extremo de la cavidad bucal y el de la aleta caudal[*]. Este modelo encubre muchos factores acerca del pez real - es decir, si es grueso o delgado, o si es un bacalao o un atún -, pero permite llevar a cabo muchos análisis como, por ejemplo, construir una distribución de frecuencia de fallas de una muestra de la población de peces.

El valor de un modelo puede ser juzgado por su sencillez y por la aproximación con la cual los acontecimientos o valores previstos por el modelo se ajustan a la observación real. Un modelo no puede ser considerado como acertado o equivocado, sino como que se ajusta satisfactoriamente a los hechos en una gama amplia o estrecha de situaciones. Un buen modelo es el que es sencillo, pero da un buen ajuste en una gama amplia.

[*] Longitud total

La mejor prueba de un modelo es su utilidad para la predicción; en este sentido la predicción abarca, no solamente la de los acontecimientos futuros, sino también la de todos los valores o acontecimientos no considerados al establecer el modelo.

Así, para establecerse un modelo que sirva para describir el crecimiento del bacalao en longitud a partir del análisis de datos de la talla media a diversas edades; tal modelo será tanto más útil si, ajustando un número mínimo de constantes, puede ser utilizado para predecir (estimar) la talla media a cada edad del eglefino o de cualquier otra especie.

En el análisis de una pesquería y en la evaluación de las poblaciones, lo que interesa, principalmente, son los cambios que registran aquéllas. Puede haber cambios en el número de una población con el tiempo, cambios en el peso de los individuos con la edad, cambios en el rendimiento motivados por las variaciones en el esfuerzo pesquero, etc.

Para el análisis de poblaciones conviene expresar el crecimiento de los peces en forma de una expresión matemática. El requisito básico es obtener una expresión que dé el tamaño (en longitud o en peso) de un pez a una edad determinada cualquiera, esa expresión debe estar de acuerdo con los datos observados sobre tamaños o pesos a ciertas edades, y debe tener una forma matemática que pueda ser incorporada con suficiente facilidad en las expresiones que den el rendimiento.

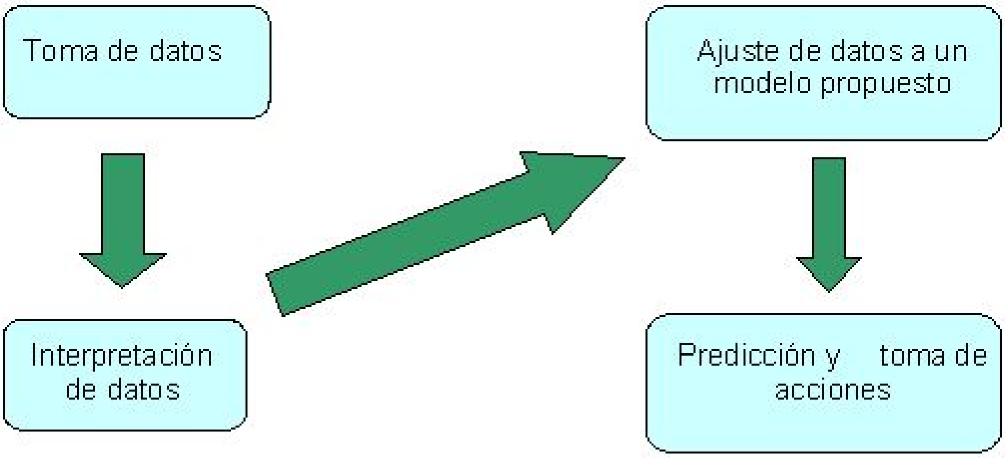
Estrictamente, la mayoría de los análisis de poblaciones están interesados más directamente en las tasas de crecimiento, es decir, en el aumento en peso o en longitud por unidad de tiempo, más que en el tamaño a diferentes edades, debido a que muchos de los problemas que se plantean en la evaluación de las pesquerías son esencialmente problemas de comparación del peso ganado por la población debido al crecimiento, y el peso perdido por mortalidad natural.

Algunas veces, por ejemplo cuando se considera el efecto de un aumento en el tamaño de primera captura, es particularmente importante conocer la tasa de crecimiento durante un período de la vida relativamente corto, es decir, conocer cuánto tiempo necesitará el pez para aumentar del peso antiguo de primera captura al nuevo peso. Hay, por lo tanto, buenas razones para preferir, permaneciendo igual todo lo demás, un método de ajuste de ecuaciones a tasas de crecimiento, más que a datos de tamaños a ciertas edades.

Otras características deseables en una ecuación de crecimiento son que el trabajo necesario para ajustarla a los datos observados no sea mucho; que el número de las constantes utilizadas sea pequeño; que siempre que sea posible esas constantes tengan un significado biológico; y que, si se extrapola hasta edades más allá de las usadas al ajustarlas, no lleve a resultados poco razonables.

MÉTODOS

Una de las prácticas más usuales de los Ingenieros y Biólogos Pesqueros cuando realizan investigación es la recolección de datos y a partir de estos plantean tesis o las refuerzan empíricamente.



Los modelos para ser usados en biología pesquera deben ser válidos para la fase explotable del recurso. El más conocido es el Modelo de von Bertalanffy (1938).

El material utilizado procede de muestreos mensuales realizados de Febrero de 2002 a Enero de 2003 mediante redes agalleras, a partir de la captura comercial y deportiva de tilapia, en la presa Aurelio Benassini Vizcaíno “El Salto”, Sinaloa, México

El total de individuos estudiados fue de 599, de los cuales se tomaron los primeros 106 para el objeto del presente documento. Con ellos se hicieron las siguientes relaciones biométricas:

Longitud total – Longitud Patrón: (Lt – Lp)
Longitud total – Altura (Lt – Alt)
Longitud patrón – ALtura (Lp – Alt)
Longitud total – peso total (Lt – Pt)
Longitud total – peso eviscerado

Longitud total.- De la punta del hocico a la parte más distante de la aleta caudal.
Longitud Patrón.- De la punta del hocico a la base de la aleta caudal.
Altura máxima corporal.- Mayor distancia entre el margen ventral y dorsal del cuerpo.
Peso total.- Peso del organismo completo.
Peso eviscerado.- Peso del organismo sin vísceras.

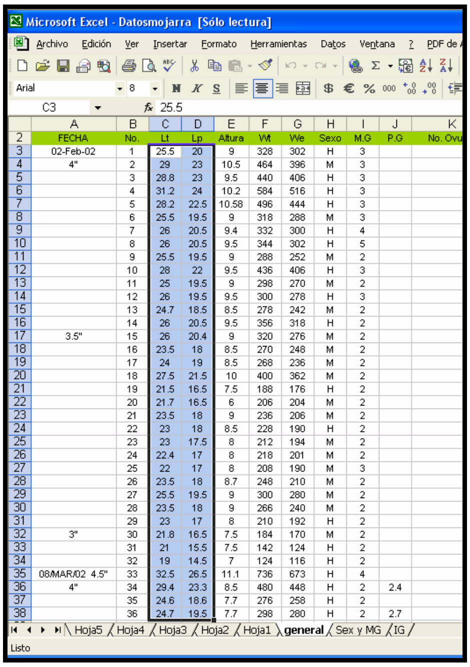
Se realizó el análisis estadístico de las relaciones biométricas para caracterizar la estructura en talla y en peso de las capturas.

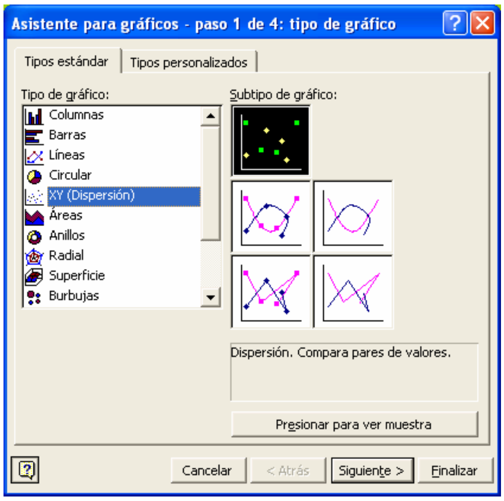
No.	Lt	Lp	Altura	Wt	We		No.	Lt	Lp	Altura	Wt	We
1	25.5	20	9	328	302		54	19.9	15	5.9	142	136
2	29	23	10.5	464	396		55	22.1	16.9	7.1	168	155
3	28.8	23	9.5	440	406		56	24.2	18.9	7.7	246	230
4	31.2	24	10.2	584	516		57	22.2	17.2	6.5	190	176
5	28.2	22.5	10.58	496	444		58	23	17.7	7.2	208	196
6	25.5	19.5	9	318	288		59	22.8	17.9	7.5	220	198
7	26	20.5	9.4	332	300		60	18.5	14.3	5.8	120	116
8	26	20.5	9.5	344	302		61	21.1	16.2	6.2	172	164
9	25.5	19.5	9	288	252		62	20.6	15.7	5.9	148	138
10	28	22	9.5	436	406		63	21.3	16.9	6.6	198	188
11	25	19.5	9	298	270		64	20.5	16	5.7	148	140
12	26	19.5	9.5	300	278		65	20.1	16	6.5	158	148
13	24.7	18.5	8.5	278	242		66	23.2	17.4	7.2	188	178

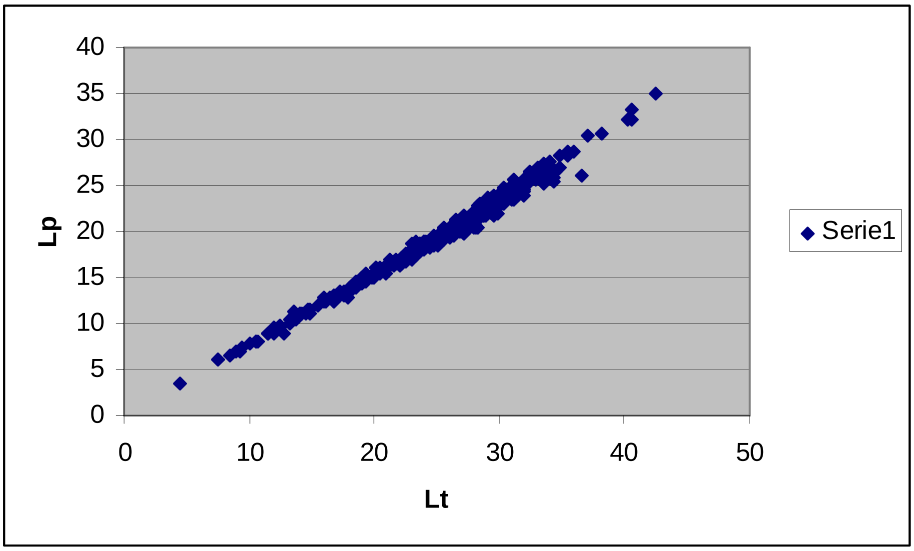
14	26	20.5	9.5	356	318		67	23.1	17.5	6.97	222	208
15	26	20.4	9	320	276		68	22.9	17.5	7	224	208
16	23.5	18	8.5	270	248		69	23.6	18.7	6.8	220	204
17	24	19	8.5	268	236		70	20.2	16	6.8	142	134
18	27.5	21.5	10	400	362		71	24	18.5	8.2	260	234
19	21.5	16.5	7.5	188	176		72	22	17	8.1	206	168
20	21.7	16.5	6	206	204		73	22	16.8	7	192	176
21	23.5	18	9	236	206		74	23.4	18	8	230	202
22	23	18	8.5	228	190		75	24.3	18.6	8.4	254	238
23	23	17.5	8	212	194		76	20.5	15.5	6.3	140	126
24	22.4	17	8	218	201		77	21.2	16.2	7.5	158	152
25	22	17	8	208	190		78	19	14.5	6.5	116	110
26	23.5	18	8.7	248	210		79	23	17.5	7.6	200	186
27	25.5	19.5	9	300	280		80	17.5	13	5	86	82
28	23.5	18	9	266	240		81	20.5	15.8	7	146	140
29	23	17	8	210	192		82	20.3	15.6	7.2	154	144
30	21.8	16.5	7.5	184	170		83	18.8	14.5	5.9	104	100
31	21	15.5	7.5	142	124		84	22.2	16.6	7.5	186	178
32	19	14.5	7	124	116		85	19	14.8	6	114	108
33	32.5	26.5	11.1	736	673		86	17.9	12.8	5.5	86	82
34	29.4	23.3	8.5	480	448		87	17.3	13	5.9	86	80
35	24.6	18.6	7.7	276	258		88	19.8	15.2	6.4	134	128
36	24.7	19.5	7.7	298	280		89	21.6	16.8	7.3	172	166
37	25	19.5	7.5	316	300		90	18	13.4	6	98	92
38	23.4	19	7.6	260	232		91	21.5	16.3	7	164	154
39	23.8	18.7	7.3	248	238		92	22.5	17.5	7.6	190	178
40	26.6	20.4	8	358	334		93	19.4	14.5	6.6	124	114
41	24.2	18.7	7.3	254	236		94	16.8	12.5	5.5	84	78
42	22.5	17.1	7.3	254	232		95	22	16.4	7.1	174	164
43	23.9	18.2	7.4	230	214		96	18	13.6	5.9	100	94
44	22	16.9	7.5	212	198		97	18.5	14	6.2	106	100
45	26.5	20.8	7.5	346	322		98	20.5	15.6	6.5	128	122
46	26.4	20.5	8.4	356	310		99	18.4	14	5.8	108	102
47	19.5	15	6	126	118		100	19.2	14.5	6.6	130	124
48	18.5	14.3	5.4	102	96		101	16.8	12.5	5.4	76	72
49	22.4	17.5	7.4	222	210		102	19	14.4	6	110	104
50	22	16.8	6.5	178	166		103	26	20.2	8.8	310	286
51	20.3	15.5	6.5	150	140		104	27.2	21.8	8.8	348	336
52	22.4	16.9	6.8	198	184		105	24	18.4	8.1	236	232
53	20	15.1	6.2	140	132		106	24.8	18.7	7.7	252	218

Se propone la utilización de Excel puesto que en la actualidad al comprar una computadora se le incorpora el programa Office, además de su fácil manejo. Para efectuar el análisis de los datos, se siguen los siguientes pasos:

1. Se introducen los datos en hoja de Excel, se marcan las columnas que se desean relacionar y se grafican (gráfico de xy de dispersión). Se observa el comportamiento del gráfico para definir el tipo de ecuación que modelará los datos.







¿Cómo podemos modelar estos datos matemáticamente?
Puesto que parece que los puntos se encuentran más o menos a lo largo de una recta, podemos intentar ajustar una de ellas para aproximar los puntos de la gráfica de dispersión. En otras palabras podemos utilizar una función lineal como nuestro modelo.

¿Cuál es la recta de mejor ajuste?
¿De qué manera obtenemos una recta que ajuste mejor los datos?

Parecería razonable escoger una recta que quede tan cerca como sea posible a todos los puntos de la gráfica de dispersión. Por lo tanto, deseamos una recta para la cual la suma de las distancias de los datos a dicha recta, sea la más pequeña.

Por razones técnicas es más conveniente obtener la recta donde es más pequeña la suma de los cuadrados de estas distancias. La recta se conoce como **de regresión o la recta de los cuadrados mínimos**.

La fórmula para la recta de regresión se determina utilizando el cálculo. Afortunadamente, esta fórmula está programada en la mayor parte de las calculadoras gráficas y en Excel.

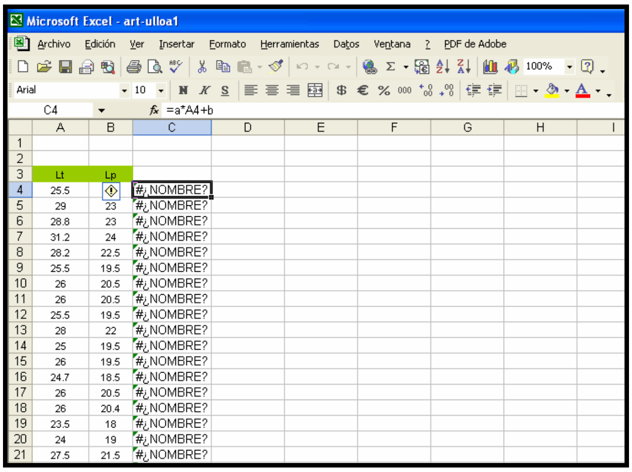
Utilizando Excel, se tienen que seguir el siguiente procedimiento:
1. Escribir los datos en dos columnas (columna A y columna B). Partiendo de A4,
2. Marcarlos y enseguida seleccionar la opción Insertar de la barra de comandos y luego seleccionar Gráfico (o bien dar un clic sobre el icono de Gráfico). En el cuadro de diálogo que aparece seleccione XY (Dispersión) y de un clic en el botón Finalizar.
3. Dado que la nube de datos se parece a una recta, utilizaremos la ecuación:

$$y = Ax + B$$

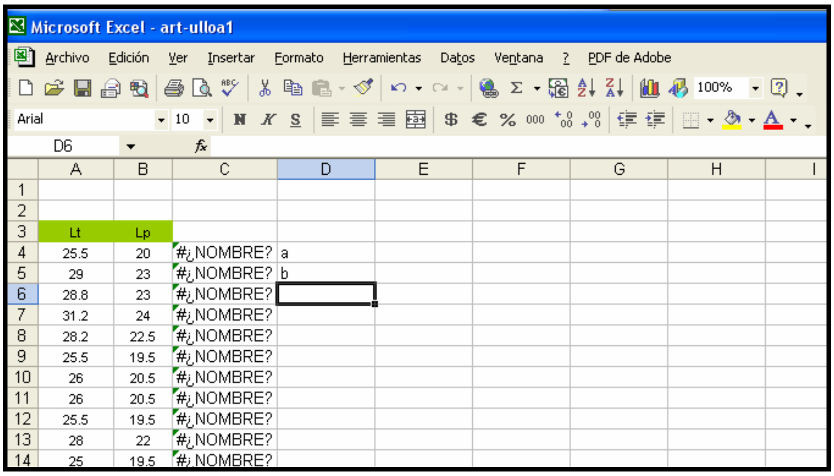
4. En la celda C4 cargue la fórmula a utilizar de la siguiente manera:

$$= a*A4 + b$$

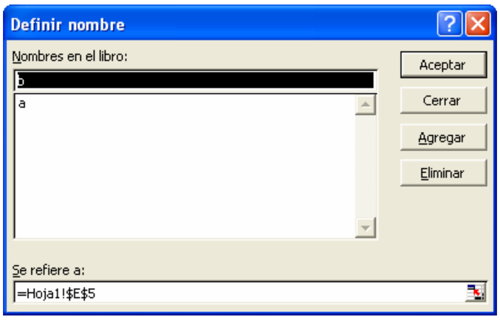
5. Copie esa fórmula en el resto de las celdas (hasta C602)



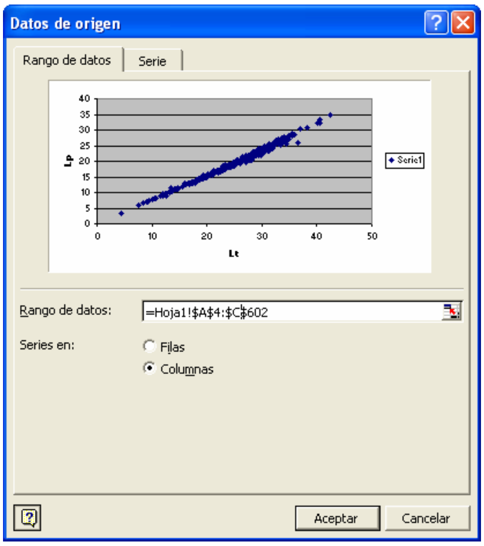
6. En las celdas D4 a D5 escriba los parámetros A y B de la ecuación de la recta.



7. Coloque el cursor en la celda E4 y seleccione la opción Insertar – Nombre – Definir y luego aceptar. Repita el procedimiento en la celda E5 para el parámetro b.



8. Observando el gráfico obtenido en el paso 2, asigne un valor para A (posicionado en la celda E4), luego un valor cualquiera para B. Grafique los resultados obtenidos (columna C) como segunda serie de datos. Dé un clic con el botón derecho del Mouse y en la caja que aparece, escoja Datos de origen.



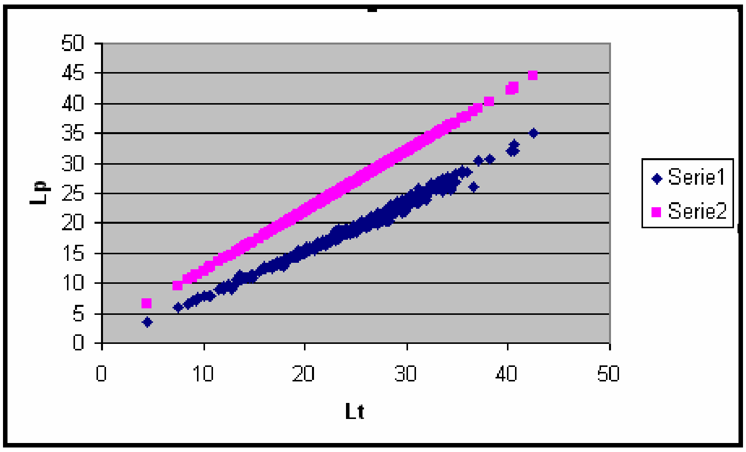
9. En la fila que aparece resaltada en negro, cambie la B de B602 por C, de tal forma que quede C602 y pulse el botón de Aceptar. Con ello aparece otra recta en el gráfico.

RESULTADOS

Las relaciones biométricas proporcionan información acerca de la manera de cómo varían entre sí las dimensiones del cuerpo de los organismos, lo que es afectado por el medio ambiente (Chavance *et al*., 1984)

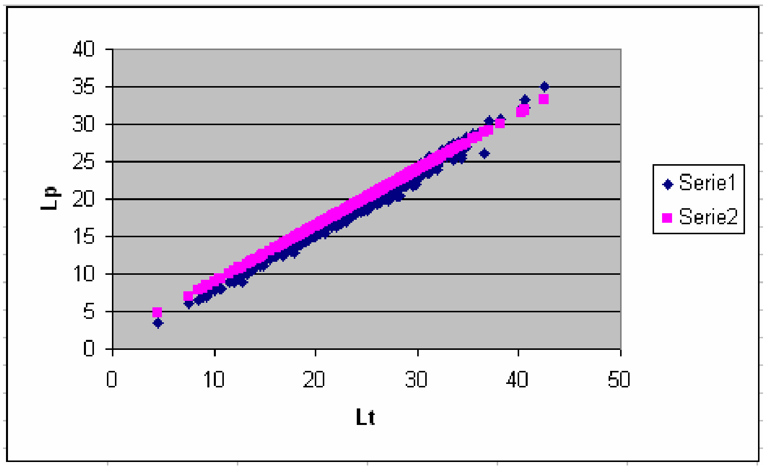
Relación Longitud Total – Longitud Patrón

Al relacionar estas variables se encuentra que se ajustan a un modelo de tipo potencial (Figura), obteniendo un coeficiente de correlación de 0.9939 y una pendiente o coeficiente de Alometría de 3.0082.



¿Qué observa?

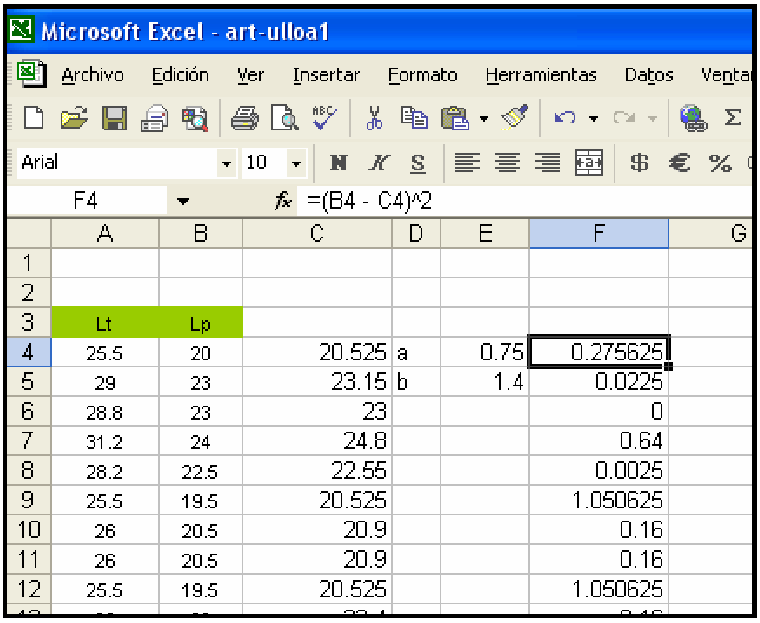
10. “Juegue” con los parámetros A y B, hasta que obtenga una recta que aproxime los datos originales, (cambie los valores asignados a A y B)



Hasta este momento se tiene la ecuación de la recta $y = 0.75\ x + 1.4$

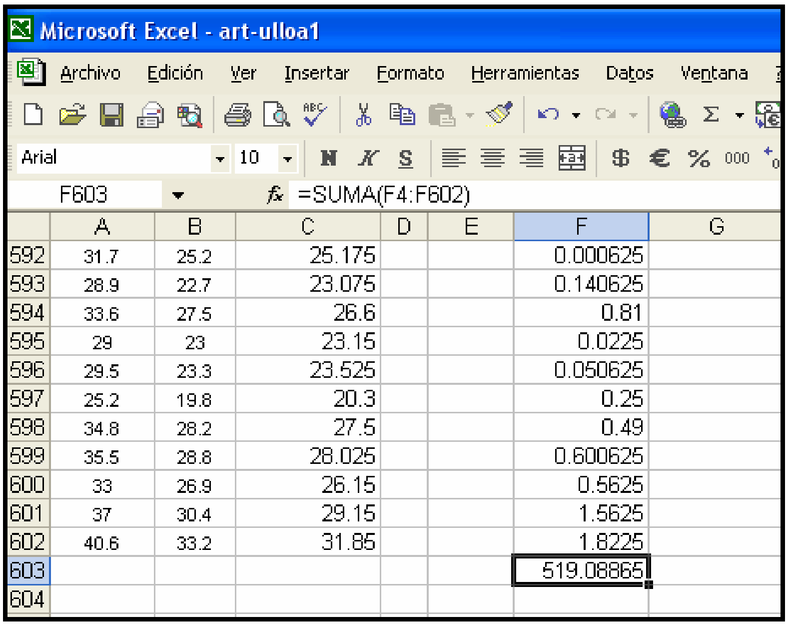
Automatización del proceso (método de mínimos cuadrados).

11. Cree una nueva columna con la diferencia cuadrada de los datos obtenidos en las celdas B y C. Coloque en el cursor en F4 y teclee = (B4 – C4)^2. Copie esta fórmula en el resto de la columna (hasta F602).



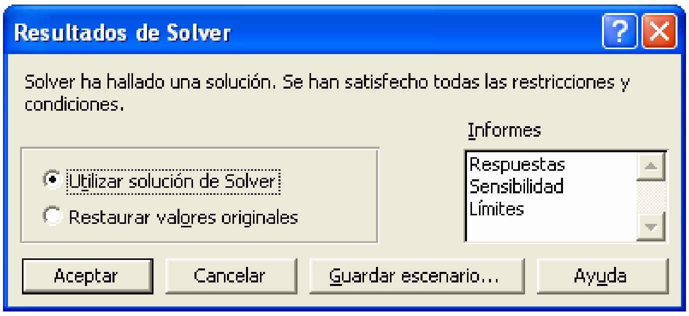
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Lt	Lp					
4	25.5	20	20.525	a	0.75	0.275625	
5	29	23	23.15	b	1.4	0.0225	
6	28.8	23	23			0	
7	31.2	24	24.8			0.64	
8	28.2	22.5	22.55			0.0025	
9	25.5	19.5	20.525			1.050625	
10	26	20.5	20.9			0.16	
11	26	20.5	20.9			0.16	
12	25.5	19.5	20.525			1.050625	

12. En la celda F603, calcule la suma de las diferencias cuadradas (con el botón Σ).

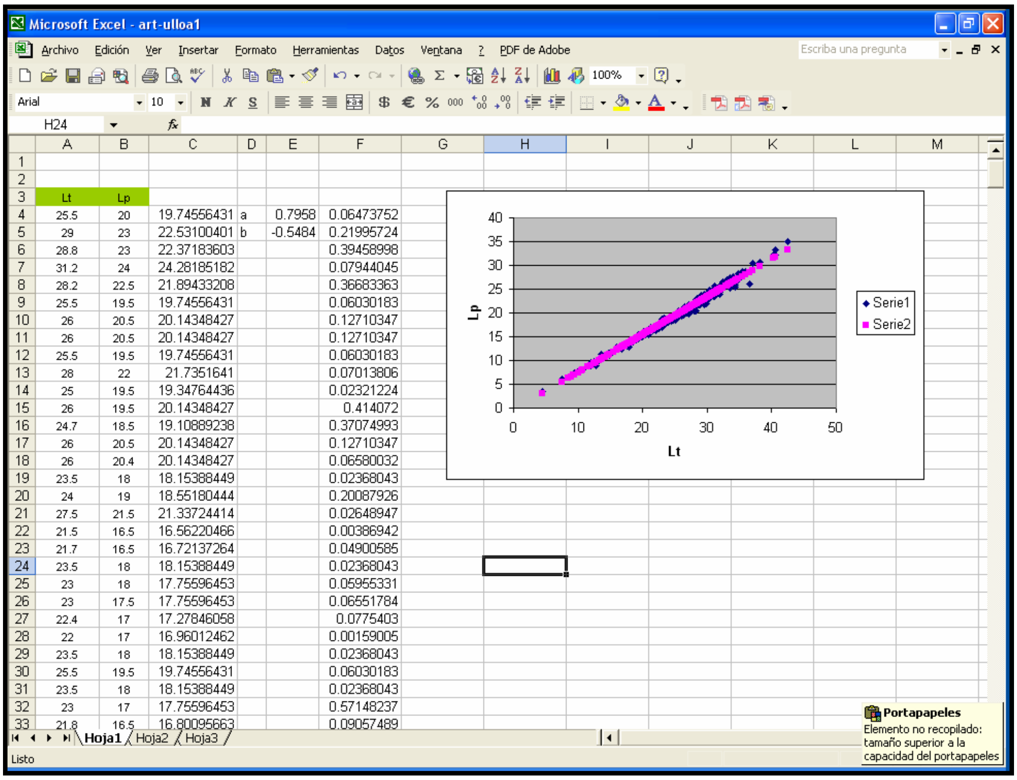


	A	B	C	D	E	F	G
592	31.7	25.2	25.175			0.000625	
593	28.9	22.7	23.075			0.140625	
594	33.6	27.5	26.6			0.81	
595	29	23	23.15			0.0225	
596	29.5	23.3	23.525			0.050625	
597	25.2	19.8	20.3			0.25	
598	34.8	28.2	27.5			0.49	
599	35.5	28.8	28.025			0.600625	
600	33	26.9	26.15			0.5625	
601	37	30.4	29.15			1.5625	
602	40.6	33.2	31.85			1.8225	
603						519.08865	
604							

13. En la celda del punto anterior pulse Herramientas – Solver. Asegúrese que la celda objetivo tenga la suma de las diferencias cuadradas, luego seleccione “Mínimo” y en la caja “Cambiando celdas” escoja las celdas que contiene los parámetros A y B (que son las celdas E4 y E5). Después de un clic sobre el botón Resolver y en la nueva caja pulse Aceptar.

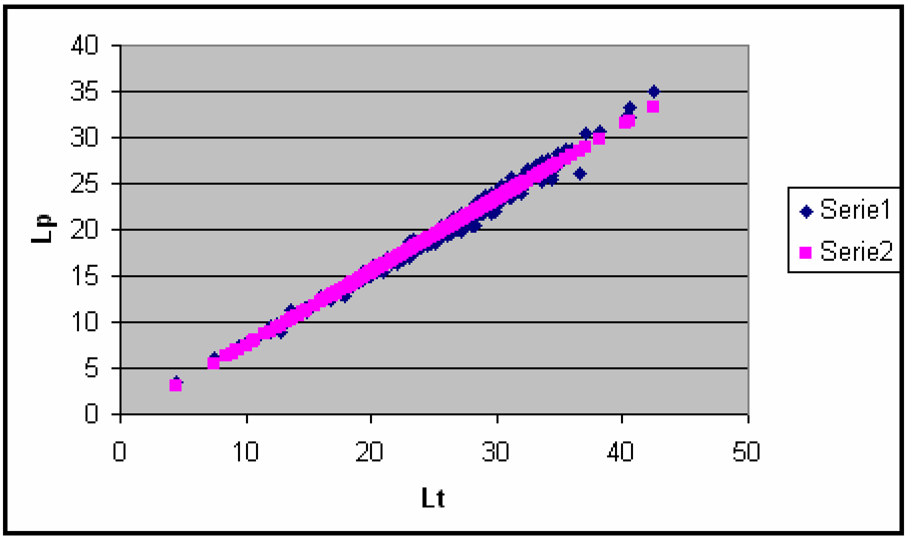


Observe como cambia el gráfico que contiene las dos series de datos. El programa a través de la función Solver, encontró el valor de los parámetros que minimizan las diferencias cuadradas (el mejor ajuste por cuadrados mínimos).

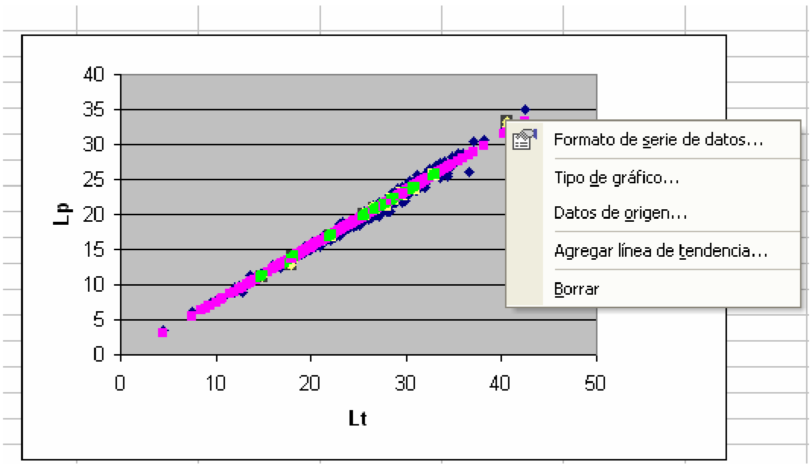


	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	Lt	Lp				
4	25.5	20	19.74556431	a	0.7958	0.06473752
5	29	23	22.53100401	b	-0.5484	0.21995724
6	28.8	23	22.37183603			0.39458998
7	31.2	24	24.28185182			0.07944045
8	28.2	22.5	21.89433208			0.36683363
9	25.5	19.5	19.74556431			0.06030183
10	26	20.5	20.14348427			0.12710347
11	26	20.5	20.14348427			0.12710347
12	25.5	19.5	19.74556431			0.06030183
13	28	22	21.7351641			0.07013806
14	25	19.5	19.34764436			0.02321224
15	26	19.5	20.14348427			0.414072
16	24.7	18.5	19.10889238			0.37074993
17	26	20.5	20.14348427			0.12710347
18	26	20.4	20.14348427			0.06580032
19	23.5	18	18.15388449			0.02368043
20	24	19	18.55180444			0.20087926
21	27.5	21.5	21.33724414			0.02648947
22	21.5	16.5	16.56220466			0.00386942
23	21.7	16.5	16.72137264			0.04900585
24	23.5	18	18.15388449			0.02368043
25	23	18	17.75596453			0.05955331
26	23	17.5	17.75596453			0.06551784
27	22.4	17	17.27846058			0.0775403
28	22	17	16.96012462			0.00159005
29	23.5	18	18.15388449			0.02368043
30	25.5	19.5	19.74556431			0.06030183
31	23.5	18	18.15388449			0.02368043
32	23	17	17.75596453			0.57148237
33	21.8	16.5	16.80095663			0.09057489

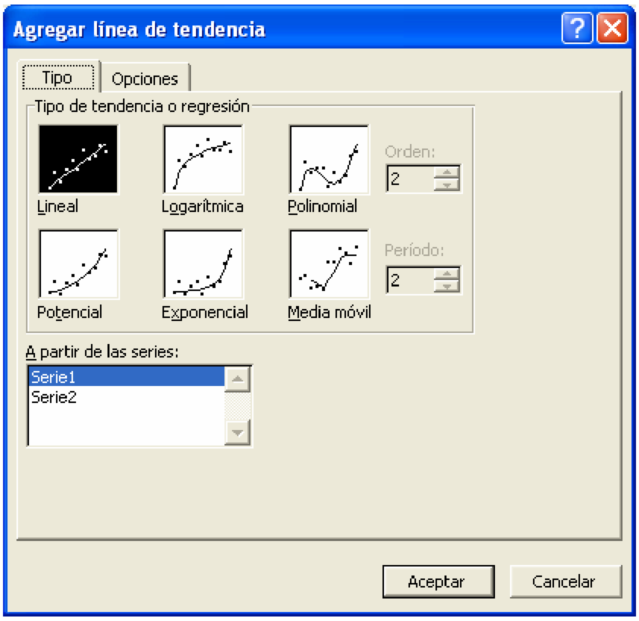
$$y = 0.7958\ x - 0.5484$$



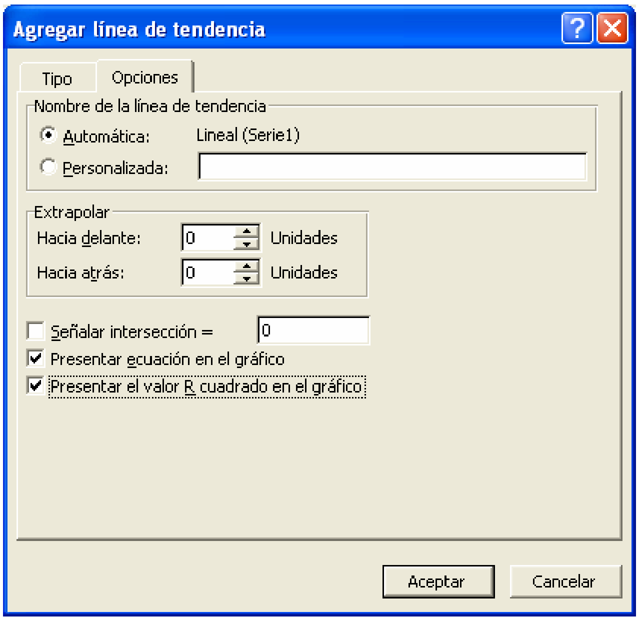
Otro procedimiento con Excel
Repita el paso 1 del procedimiento anterior y coloque el cursor sobre el área del gráfico, específicamente sobre uno de los datos o puntos. De un clic al botón derecho del mouse.



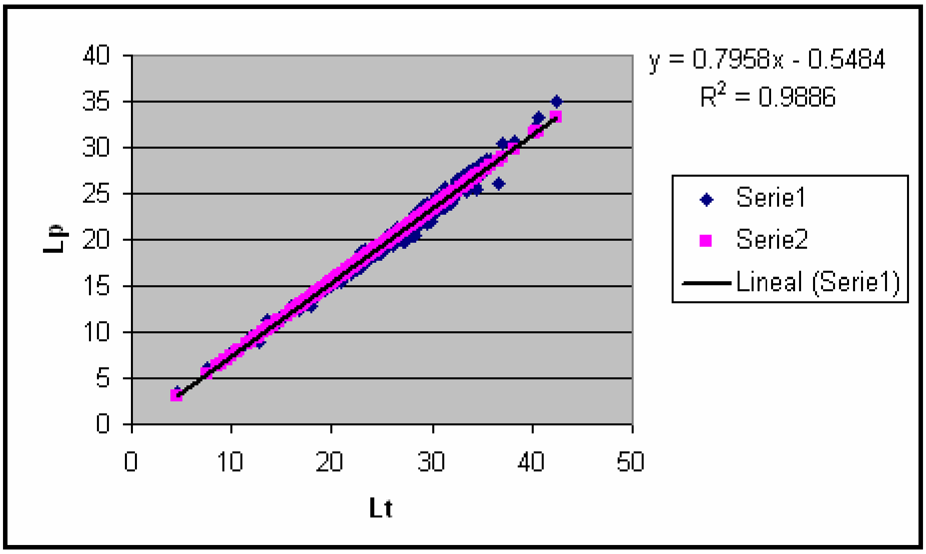
Como puede observarse aparece una caja con varias opciones, escoja “Agregar línea de tendencia”, con ello aparecerá otra caja de diálogo con varias alternativas para seleccionar la línea de tendencia que consideramos adecuada.



Para este caso dé clic sobre Lineal, y abra la carpeta Opciones, para detallar nuestro modelo.

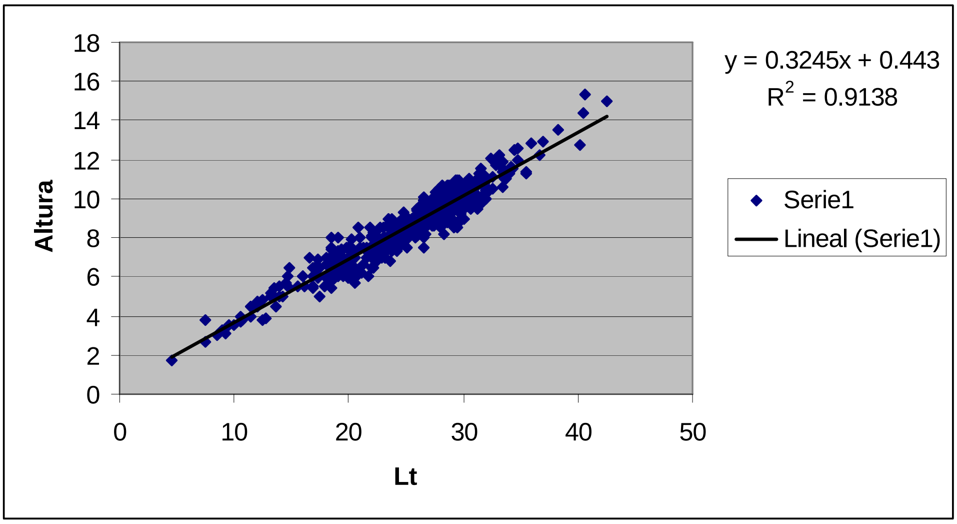


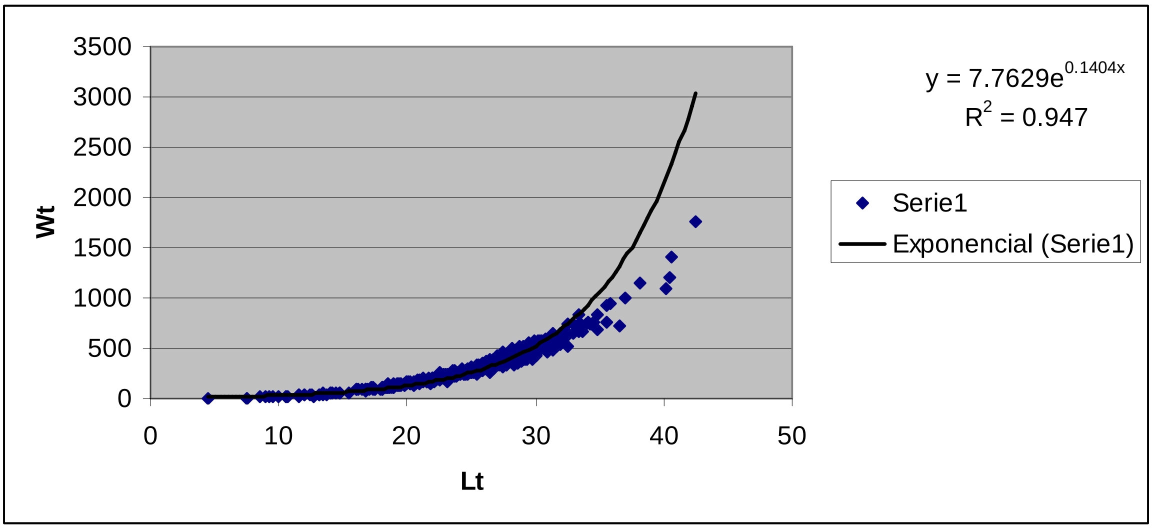
Damos un clic en las cajas “Presentar ecuación en el gráfico” y “Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico”, con ello tendremos además de la ecuación, el coeficiente de correlación.

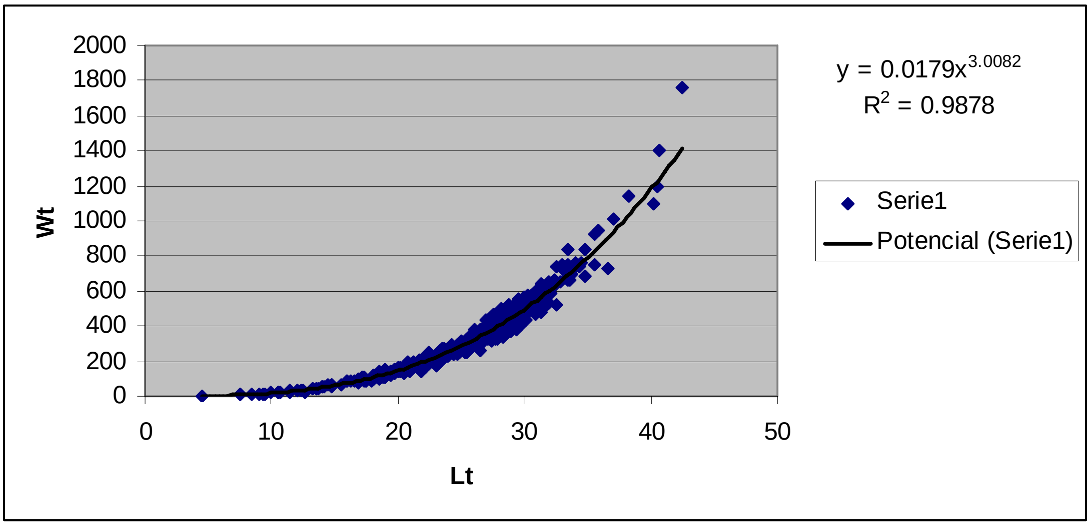


Como podemos ver este último procedimiento es mucho más rápido que el anterior.

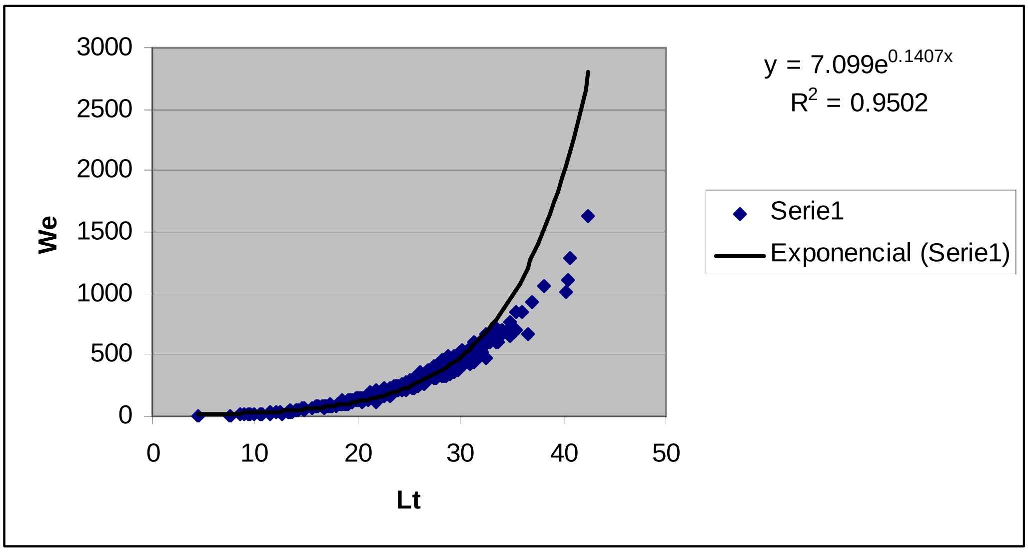
Usando este último procedimiento obtendremos los modelos de otras de las mediciones.



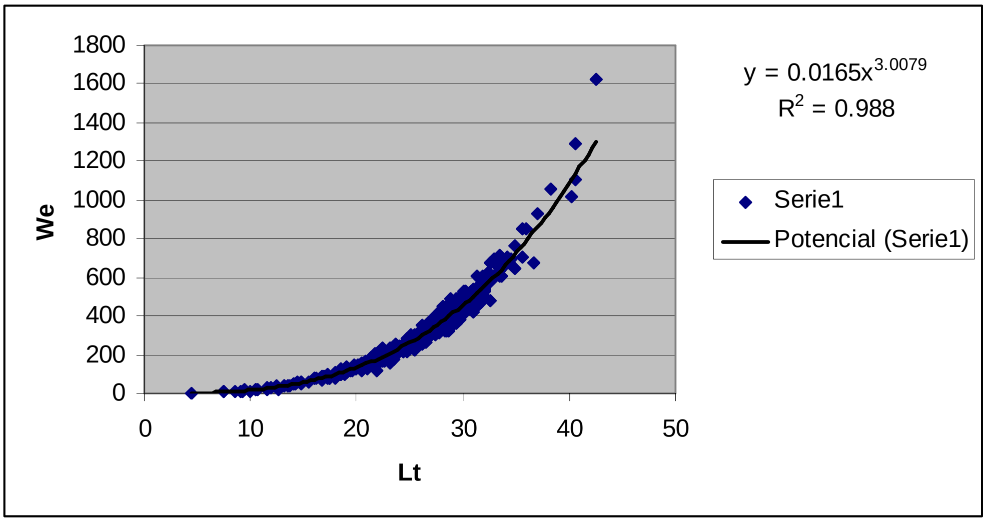




Wt
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
10
20
30
40
50
Lt
y = 0.0179x^3.0082
R^2 = 0.9878
Serie1
Potencial (Serie1)



We
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
10
20
30
40
50
Lt
y = 7.099e^0.1407x
R^2 = 0.9502
Serie1
Exponencial (Serie1)



We
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
10
20
30
40
50
Lt
y = 0.0165x^3.0079
R^2 = 0.988
Serie1
Potencial (Serie1)

Conclusiones

Como puede observarse en el análisis que se hace de la relación Longitud total – Longitud Patrón: (Lt – Lp), los métodos descritos proporcionan el mismo resultado:

$$y = 0.7958\,x - 0.5484$$

Esto nos indica que puede se utilizado indistintamente cualquiera de ellos, sin embargo; el primero permite apreciar la forma en que los valores de los parámetros definidos afectan el ajuste del modelo a los datos reales, mientras que el segundo nos lleva directamente al ajuste de los mismos.

Por otra parte el segundo método nos encajona a los modelos preestablecidos en la hoja de Excel y pudiera no ajustar cierto tipo de datos, como por ejemplo al modelo de crecimiento logístico:

$$N = \frac{\mathbf{K}}{1 + \mathbf{e}^{\mathbf{a}-\mathbf{rt}}}$$

Por lo tanto, el primer método proporciona una gama abierta de posibilidades que dependerá de la habilidad de la persona que realice el análisis de los datos. Además proporciona un procedimiento didáctico para la modelación, ya que permite ver la forma en que los parámetros definidos influyen en el modelo.

Literatura Citada.

Álvarez, L. y Manelia, J.1996. Informe Nacional sobre el estado de la contaminación marina en el Pacífico de Panamá. CPPS-PNUMA: 22 pp.

Apolinar, S. y Chávez, E. 1999 Evaluación de la pesquería de *Lutjanus peru* de Guerrero México CICIMAR, IPN La Paz BCS

Arrieta, J.; Buendía, G.; Ferrari, M.; Martínez, G.; Suárez, L (2004). Las Prácticas Sociales como Generadoras del Conocimiento Matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 418-422.

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Disertación doctoral publicada, Cinvestav, México.

Belmont, J. (2003). Algunos aspectos poblacionales y reproductivos de Oreochromis aureus en la presa el Salto, Sinaloa. Tesis de Licenciatura. UAS, México.

Cadima, E. (2003). Manual de evaluación de recursos pesqueros. FAO DOCUMENTO TÉCNICO DE PESCA. Roma

Chavance, P. Flores, H. D., Yañez – Arancibia, A y Amescua., L. F. (1984). Ecología, biología y dinámica de poblaciones de Bardiellan chysoura, en la laguna de Términos, Sur del Golfo de México. An. Inst. Ciencias del Mar y Limnología. Universidad Nacional Autónoma de México. Mer., 21:153 – 159

Gulland, J. A. (1971). Manual de Métodos para la Evaluación de las Poblaciones de Peces. FAO. Editorial ACRIBIA, España.

Sánchez F.; Miramontes, P.; Gutiérrez, J. (2002). Clásicos de la Biología Matemática. Siglo XXI editores. México

Huxley, J. 1932. Problems of relative growth. MacVeagh, London, 276 pp.

Elizondo - Garza, R. 1966. Caracterización biológico – pesquera de la presa Vicente Guerrero (Las Adjuntas), Tamps., México con análisis de capturas de tilapia y lobina negra. INP. SEMARNAP. Ciencia Pesquera No. 13. pp 37 - 54