REDVET. Revista electrónica de Veterinaria 1695-7504
2010 Volumen 11 Número 03

REDVET Rev.electrón.vet. http://www.veterinaria.org/revistas/redvet -http://revista.veterinaria.org
Vol. 11, Nº 03, Marzo/2010– http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n030310.html

El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos

The logistic model: an alternative for the study of organisms growth population.

Ulloa Ibarra, José Trinidad: Escuela Nacional de Ingeniería Pesquera, Universidad Autónoma de Nayarit, México, CICATA – IPN. ulloa@cameuan.com.mx | **Rodríguez Carrillo, Jorge Armando:** Programa Académico de Matemáticas, Universidad Autónoma de Nayarit, México. carrillojro@hotmail.com

Resumen

El objetivo del presente trabajo consiste en demostrar la utilidad de una alternativa para el análisis del modelo logístico de la forma $P(t) = \dfrac{k\,P_0\,e^{rt}}{k + P_0\,(e^{rt} - 1)}$. Con ello se busca que la comunidad del área Biológico – Agropecuaria - Pesqueras al estudiar el crecimiento poblacional mediante el modelo logístico lo haga por medio de un análisis detallado de los parámetros de dicho modelo.

De la misma forma, mostramos por medio de una actividad - crecimiento poblacional de ciertos organismos - una forma sencilla y detallada de obtener un modelo logístico, así como de la interpretación adecuada y precisa que se deba o pueda hacer para cada uno de los valores de los parámetros involucrados en el modelo con la finalidad de tener mejoras en la producción animal.

Se concluye que el buen uso y análisis de una práctica de laboratorio, de campo o alguna simulación de una situación problemática que refleje un crecimiento poblacional, es decir, comportamiento logístico, ayudará a tener las herramientas necesarias y suficientes para poder encontrar un buen modelo matemático que pueda aportarle información importante para la toma de decisiones que ayuden a la mejora de una producción biológico, agropecuaria ó pesquera.

Palabras clave: modelo logístico | parámetros | crecimiento poblacional | actividad escolar

Abstract

The aim of this paper is to demostrate the utility of an alternative in the analysis of the logistic model of the form $P(t) = \frac{k P_0 e^{rt}}{k + P_0 (e^{rt} - 1)}$. In this point we are trying that the Biological Agriculture-Fishery- community area in studying population growth through the logistic model it does it through a detailed analysis of the parameters of the model.

In the same way, we show by an activity of - population growing of certain organisms - an easy and detailed way to obtain a logistic model, as well as adequate and accurate interpretation arises or can do for each of the values of parameters involved in the model with the purpose of having improvements in animal production.

We conclude that the proper use and analysis of a laboratory practice, field or some simulation problems that reflects population growing, it means that, logistical behavior, will help to have the necessary tools and enough to find a good mathematical model that can provide you important information on making decisions, that help improving biological production, agriculture or fisheries.

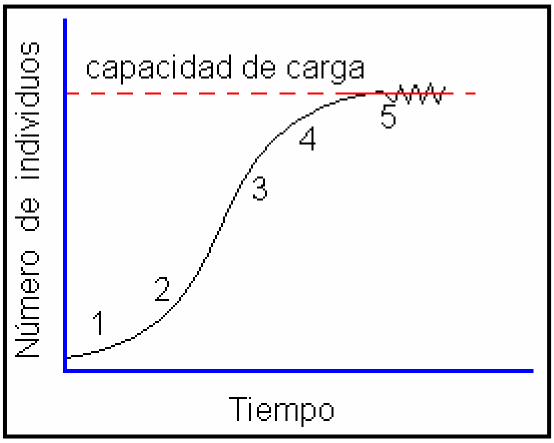
Key words: logistic model | parameters | population growth | school activity

Introducción.

La modelación matemática ha empezado a cobrar fuerza muy esencial al saber relacionar el estudio de diferentes ciencias, tales como: biología, física, química, con la matemáticas, haciendo de ellas un aprendizaje más significativo. De esta manera la modelación matemática se muestra como un eje medular en la predicción o toma de decisiones respecto de fenómenos sociales o naturales ya que una buena interpretación de un modelo matemático ayudará a tener buenos resultados futuros, de lo contrario las perdidas pueden ser grandes.

En la actualidad, la utilización de modelos matemáticos en plagas y enfermedades de los cultivos, pueden abarcar aspectos muy variados y amplios. Sin embargo, los mayores esfuerzos se han centrado en los modelos de población en el tiempo y/o espacio.

Uno de los patrones de crecimiento más simples observados en las poblaciones naturales se conoce como crecimiento logístico y se representa con una curva sigmoidea, o en forma de S, véase la ilustración. Como ocurre con el crecimiento exponencial, hay una fase de establecimiento inicial en que el crecimiento de la población es relativamente lento (1), seguida de una fase de aceleración rápida (2).



Luego, a medida que la población se aproxima a la capacidad de carga del ambiente, la tasa de crecimiento se hace más lenta (3 y 4) y finalmente se estabiliza (5), aunque puede haber fluctuaciones alrededor de la capacidad de carga.

La función logística ó curva logística es una función matemática que aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales.

Con la función logística se pueden modelar entre otros:

- Crecimiento poblacional en un ambiente con recursos limitados.
- Ventas de un producto donde el total de venta tiene límite.
- Tiempo de respuesta a medicamentos en pacientes.
- La población de animales en una isla.
- El número de bacterias en una caja de Petri.

Desarrollo.

Propiedades del modelo logístico.

A pesar de existir un sin numero de ecuaciones que reflejan un modelo logístico, partiremos de la ecuación Verhulst - Pearl siendo ésta de nuestro interés, por los parámetros que presenta.

$$P(t) = \frac{k\, P_0\, e^{rt}}{k + P_0\,(e^{rt} - 1)}$$

Factores $P(t)$, t y e .

$P(t)$ representa el número de organismos, población existente, en un tiempo "t " determinado. Mientras que, "e" es la base del logaritmo natural, o sea, aproximadamente a 2.7183.

Parámetro k .

Es la capacidad de carga, del ambiente, generalmente. Así pues, teóricamente es el valor que determina la línea ó nivel de saturación del sistema; sin embargo, en la práctica (mundo real) la densidad no suele nivelarse en un estado estable inmediatamente debajo de k, sino que fluctúa arriba y debajo de los niveles (Odum y Sarmiento, 1998) ya que no existen controles homeostáticos puntuales por encima del nivel jerárquico de los organismos.

De esta forma si:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = k$$

Parámetro P_0.

Determina la población inicial que presenta el sistema. La población inicial deberá ser menor que la capacidad de carga, teórica, del ambiente o lo que es lo mismo a la población máxima. Por otro lado, nunca habrá una $P_0 = 0$; dado que, debe existir una población base para que este presente un crecimiento en ella y por tal pueda ocurrir un modelo logístico que exprese su crecimiento poblacional. Así pues, tampoco puede existir $P_0 = k$.

Relación entre los parámetros k y P_0.

Si $P_0 < k$ la población crece, hasta verse afectada por los diversos factores del medio ambiente, y alcanza una planicie, el nivel de saturación o capacidad de carga, k . Gráficamente, lo que ocurre, es la curva logística. *Véase la Fig. 1*.

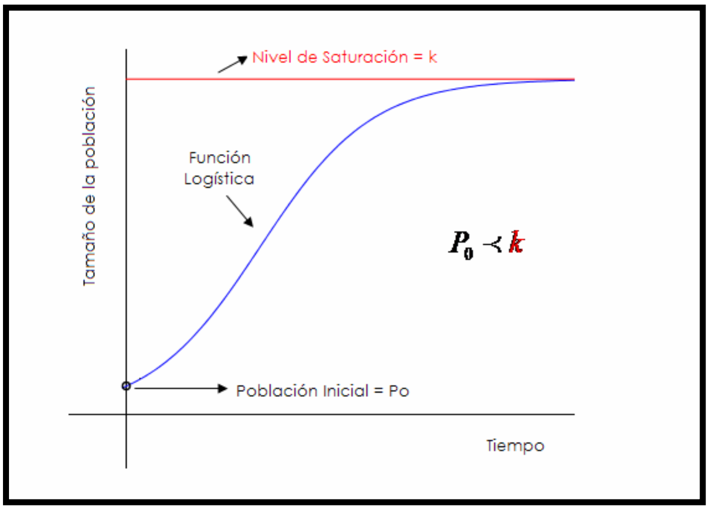


***Fig. 1** La población inicial (P_0) menor que el nivel de saturación (k).*

Parámetro r .

El parámetro r representa, en la función logística, la tasa instantánea de crecimiento poblacional. A diferencia de la función exponencial, el parámetro r en la función logística no es constante, el estatus del parámetro, en la función logística, para cada punto se muestra en la Fig. 2.

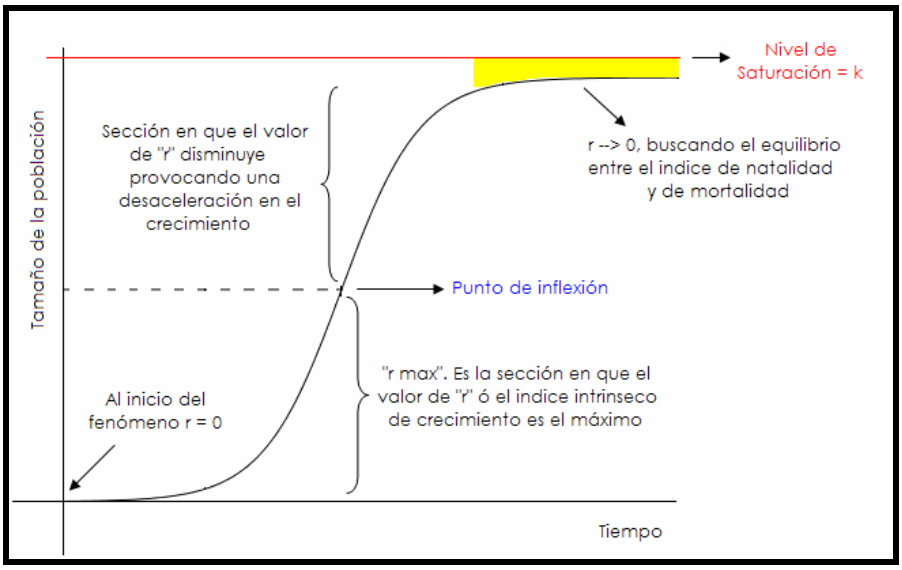


Fig. 2 Efecto del parámetro " r " a lo largo de la función logística.

Dicho de otra forma, el crecimiento logístico comienza en forma similar al crecimiento exponencial, con un índice de natalidad mucho mayor que el índice de mortalidad pero en $\left(\frac{\ln\left(\frac{k}{P_0}-1\right)}{r}, \frac{k}{2}\right)$, la aceleración cesa y comienza la desaceleración. Invirtiendo la situación, esto es, durante la desaceleración el índice de natalidad comienza a disminuir mientras que el índice de mortalidad se incrementa. Finalmente ambos alcanzan el equilibrio, $r = 0$ (Wallace et al, 1992).

Si $r > 0$ permite que se pueda desarrollar la función logística, mientras mayor sea el valor del parámetro r mayor será la velocidad con que se produzca el acercamiento a la capacidad de saturación, k , *véase Fig. 3 y Fig. 3a*. Esto es, si r es cada vez mayor el crecimiento de la población será mas rápido y a su vez se acercara más rápidamente al límite de saturación.

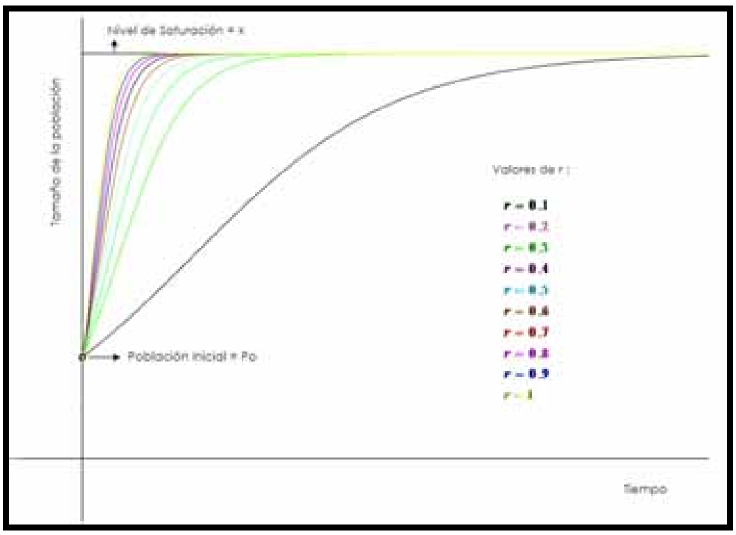


Fig. 3 Función logística con valores de “ r ” mayores que cero.

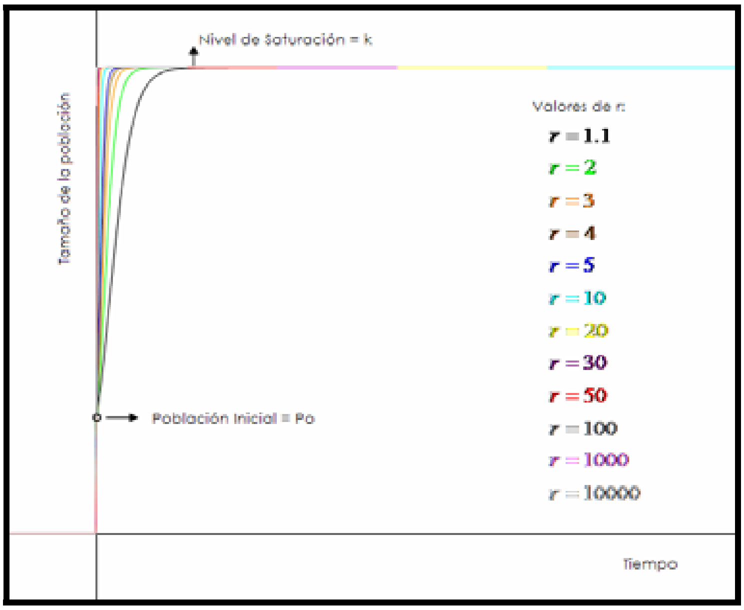
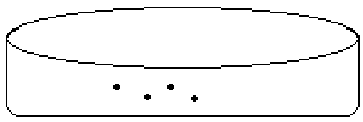


Fig. 3a Función logística con valores de “ r mayores que cero.

Ejemplo. *El caso de una actividad escolar.*
En una práctica de laboratorio, se analizó el crecimiento poblacional que mantenían organismos de cierta especie en un recipiente contenedor. Los datos obtenidos se registraron en la siguiente tabla.



Recipiente contenedor
(t = 0 min)

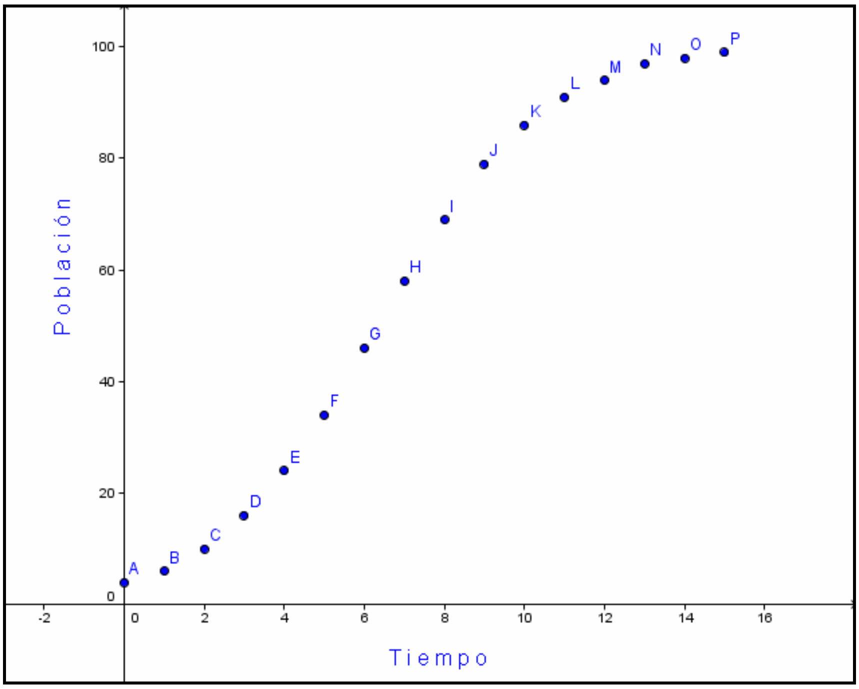
Tiempo (t)	0	1	2	3	4	5	6	7
Población (p(t))	4	6	10	16	24	34	46	58

8	9	10	11	12	13	14	15
69	79	86	91	94	97	98	99

Solución.

Si se tratara de encontrar un modelo matemático que mejor ajuste el crecimiento poblacional anterior, se puede hacer uso de lo siguiente:

1. Graficar los datos con la finalidad de ver su distribución.



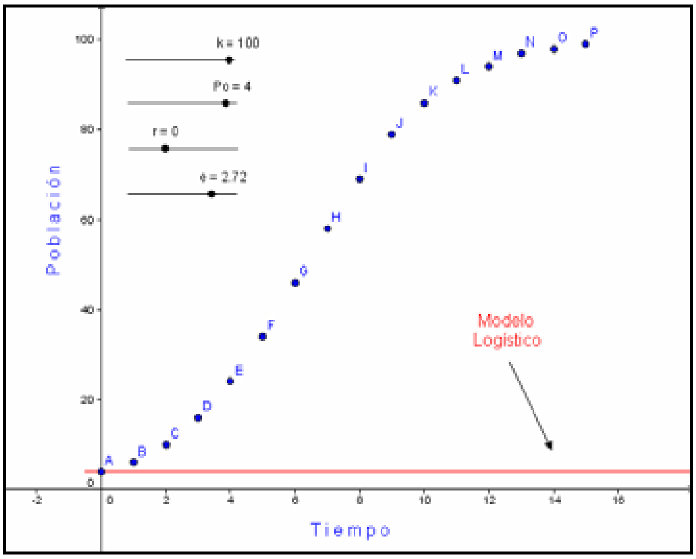
Al ver la distribución de los datos podemos percatarnos que se trata de un comportamiento logístico, esto es, los datos de la práctica representan un modelo logístico dado que en ella se esta manifestando un crecimiento poblacional.

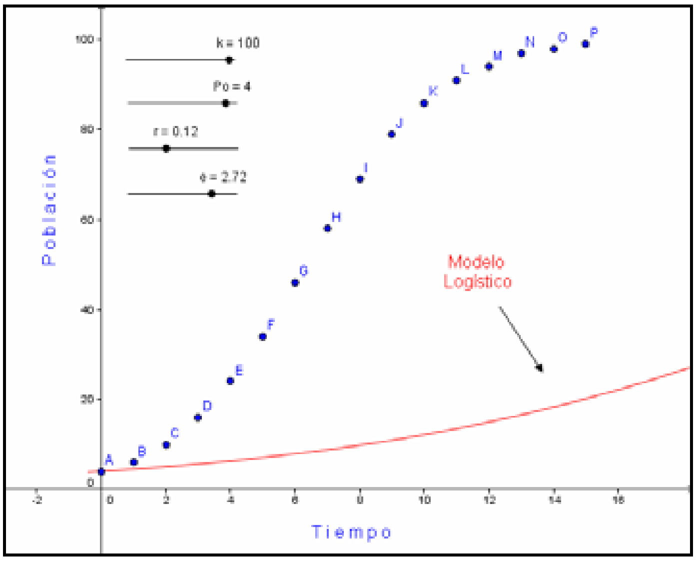
De acuerdo con la función logística, $P(t) = \frac{k\, P_0\, e^{rt}}{k + P_0\,(e^{rt} - 1)}$, y haciendo uso de nuestra tabla de datos y gráfica, podemos obtener lo siguiente:

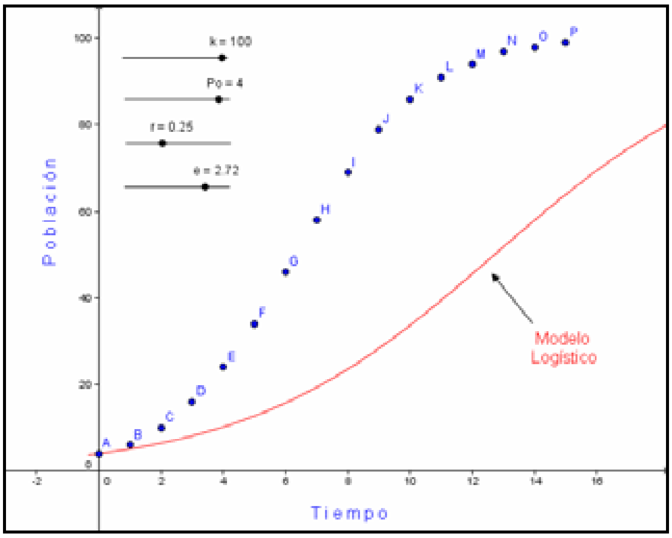
k = 100 (considerando que la población de los organismos tiende a 100)

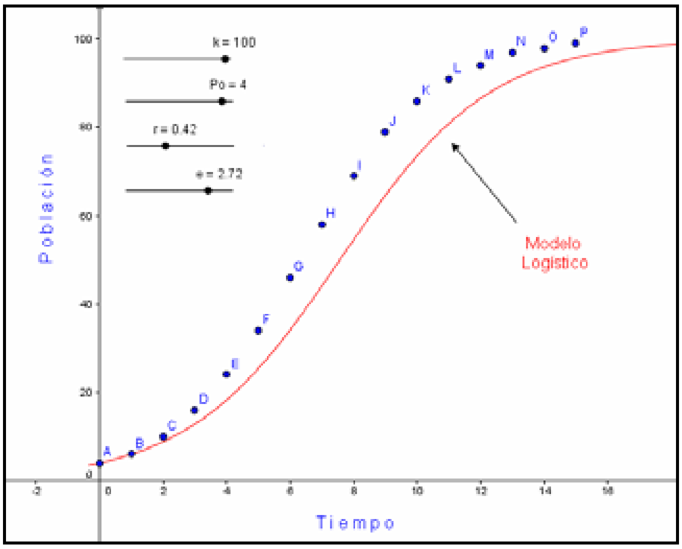
P_0 = 4 (tomando en cuenta que se trata de la población en $t = 0$)

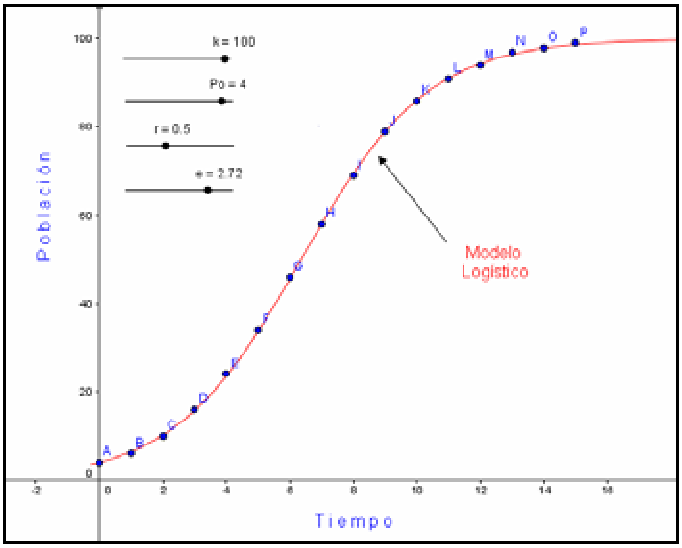
Por lo tanto, el valor que hace falta obtener es "r ". Para esto, se hace variar el parámetro "r " (puede hacerse uso de un gráficador) hasta encontrar aquella gráfica que mejor ajusta los datos.


k = 100
Po = 4
r = 0
e = 2.72
Modelo
Logistico
Población
Tiempo


k = 100
Po = 4
r = 0.12
e = 2.72
Modelo
Logistico
Población
Tiempo


k = 100
Po = 4
r = 0.25
e = 2.72
Modelo
Logistico
Población
Tiempo





Por lo tanto, el modelo logístico que mejor ajusta al experimento, es:

$$f(t) = \frac{(100)(4)e^{(0.5t)}}{100 + 4(e^{0.5t} - 1)}$$

De esta forma, si comparamos los datos arrojados por el modelo obtenido con los datos proporcionados por el experimento, podemos ver que la población no diferencia mucho, *véase la Tabla 1*. Así pues, la fuerte precisión del modelo ayuda a que la predicción de la población, en un tiempo futuro, sea muy cercana a la realidad, con ello podemos hacer mejoras en nuestra producción animal, con tiempo suficiente, en dado caso de que la población obtenida por un modelo no sea la que nosotros deseáramos o estuviéramos buscando.

Tiempo	Población	Población (modelo)
0	4	4
1	6	6.429
2	10	10.179
3	16	15.747
4	24	23.562
5	34	33.704
6	46	45.607
7	58	58.033
8	69	69.518
9	79	78.997
10	86	86.117
11	91	91.096
12	94	94.405
13	97	96.531
14	98	97.867
15	99	98.696

Tabla 1. Datos de Tiempo (t), Población (p(t)) y Población modelo (p(t) modelo).

Interpretación.

De esta manera, la interpretación para el modelo obtenido podría ser la siguiente:

- El parámetro $k = 100$, significa que es la capacidad máxima que puede existir en el recipiente contenedor. Aunque la población de organismos pueda exceder ligeramente, ésta nunca podrá ser muy grande debido a que existiría una sobresaturación provocando muertes de organismos y esto provocaría tarde o temprano un establecimiento en la población, es decir, la población, teóricamente, fluctuará sobre el valor de 100.

- El parámetro $P_0 = 4$, implica el valor inicial, en población, que mantiene el medio donde se esta generando el crecimiento poblacional.

- El parámetro $r = 0.5$, significa que la tasa instantánea de crecimiento poblacional se comporta de forma equilibrada, esto es, las condiciones favorables existentes (natalidad e inmigración) para que se desarrolle un crecimiento poblacional son iguales a las condiciones en contra (mortalidad, emigración, espacio, energía).

Conclusión.

Se concluye que el buen uso y análisis de una práctica de laboratorio, de campo o alguna simulación de una situación problemática que refleje un crecimiento poblacional, es decir, comportamiento logístico, en actividades escolares ayudará al alumno a tener las herramientas necesarias y suficientes para poder salir avante en su campo profesional ayudándole a tener las bases para poder encontrar un buen modelo matemático que pueda aportarle información importante para la toma de decisiones que ayuden a la mejora de una producción biológico, agropecuaria ó pesquera.

Bibliografía consultada y recomendada.

- Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Odum, E. y Sarmiento, F. (1998). Ecología. El puente entre ciencia y sociedad. Pág. 169. México. Editorial Mc Graw – Hill Interamericana.
- Rodríguez, J. (2008). Una propuesta didáctica para el estudio de un modelo logístico. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Nayarit. Tepic. Nay.
- Wallace, R., King, J. & Sanders, G. (1992). Conducta y ecología. La ciencia de la vida. Pág. 133. México. Editorial Trillas.

REDVET: 2010, Vol. 11 Nº 03

Recibido: 28.10.09 – Ref. prov. DIC0902 – Revisado: 18.12.09 - Aceptado: 15.02.10
Ref. def. 031004_REDVET - Publicado: 01.03.2010

Este artículo está disponible en http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n030310.html
concretamente en
http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n030310/031004.pdf